**Esercizio 1.**
Dire per quali numeri naturali $n$ è vera la disuguaglianza

$$2^{2^n} \geq 2^2(n!)$$

La disuguaglianza

$$2^{2^n} \geq 2^2 (n!)$$

è vera $\forall n \geq 1$. Infatti è falsa per $n=0$ in quanto

$$2^{2^0} = 2^1 = 2 < 2^2 \cdot 0! = 4$$

ed è verificata per $n=1$ ~~PASSO~~ $2^2 \geq 2^2 \cdot 1! = 2^2$

Mostriamo il risultato per induzione.
Abbiamo già verificato il passo base $n=1$.
PASSO INDUTTIVO: supponiamo vera la tesi per un certo $n \geq 1$ e mostriamola per $n+1$

$$2^{2^{n+1}} = \left(2^{2^n}\right)^2 \underset{\text{ip ind}}{\geq} \left(2^2(n!)\right)^2 = 2^2\, 2^2 (n!)^2$$

Per provare la disug per $n+1$ basta mostrare che

$$2^2 (n!)^2 \geq (n+1)!$$

o, equivalentemente $2^2\, n! \geq n+1$

e questo è chiaramente vero ad esempio perché $\forall n \geq 1$, $n+1 \leq n+n \leq n! + n! < 2^2 n!$

**Esercizio 2.** Trovare tutte le soluzioni del sistema di congruenze

$$\begin{cases} 18x \equiv 232 \bmod 34 \\ 220x \equiv 80 \bmod 30 \end{cases}$$

È vero o falso che per ogni numero $n \in \mathbb{Z}$ esiste una soluzione $\bar{x}$ del sistema tale che $\bar{x} \equiv n \bmod 5$ ?

$$\begin{cases} 18x \equiv 232 & (34) \\ 220x \equiv 80 & (30) \end{cases}$$

Dividendo la prima congruenza per 2 e la seconda per 10 otteniamo

$$\begin{cases} 9x = 116 & (17) \\ 22x \equiv 8 & (3) \end{cases}$$

Studiamo la prima eq. Questa è equivalente a

$$\underline{9x} \equiv 116 - 17 \cdot 6 = \underline{14} \qquad (17)$$

Ora l'inverso di 9 mod 17 è 2, perché

$$9 \cdot 2 \equiv 1 \quad (17)$$

quindi, moltiplicando per 2 l'eq diventa

$$x \equiv 28 \equiv 11 \quad (17)$$

~~Occupiamoci ora della eq~~

L'equazione $22x \equiv 8 \quad (3)$

~~che~~ è equivalente a

$$x \equiv 2 \ (3)$$

Si ha quindi il sistema

$$\begin{cases} x \equiv 11 \quad (17) \\ x \equiv 2 \quad (3) \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = 11 + 17t \\ x = 2 + 3s \end{cases}$$

~~[illegible]~~

L'eq risolvente del sistema è

$$11 + 17t = 2 + 3s$$

$$3s - 17t = 9 \quad (*)$$

$$\begin{cases} s = 3 \\ t = 0 \end{cases} \quad \text{soluzione particolare}$$

Sol eq omogenea: $3s - 17t = 0$

$$\Longleftrightarrow \quad 3s = 17t \qquad \begin{cases} s = 17h \\ t = 3h \end{cases}$$

Sol generale eq $(*)$

$$\begin{cases} s = 3 + 17h \\ t = 3h \end{cases} \quad h \in \mathbb{Z}$$

Sostituendo si ottiene

$$x = 11 + 17(3h) = 11 + 51h$$

cioè $x \equiv 11 \ (51)$ è la sol del sistema assegnato

b) ~~Si chiede se [illegible]~~

b) Si tratta di dire se $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists$ una sol del sistema

$$\begin{cases} x \equiv 11 & (51) \\ x \equiv n & (5) \end{cases}$$

Poiché $(5, 51) = 1$ il Teorema cinese del resto garantisce che il sistema ha soluzioni $\forall n$ - (tale soluzione è unica modulo $5 \cdot 51 = 255$ )

**Esercizio 3.** Sia $T_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo che, rispetto alla base canonica, è rappresentato dalla matrice

$$[T_a] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ a^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo $T_a$ è diagonalizzabile.

$$[T_a] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ a^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolo autovalori:

$$P_{T_a}(x) = \det([T_a] - xI) =$$

$$\begin{vmatrix} 1-x & 0 & 1 \\ 0 & a-x & 0 \\ a^2 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (a-x)\left[(1-x)^2 - a^2\right]$$

$$= (a-x)(1-x-a)(1-x+a) =$$

$$= -(x-a)(x-1+a)(x-a-1)$$

Gli autovalori sono le radici del pol caratt., quindi

$$\lambda_1 = a$$

$$\lambda_2 = +1-a$$

$$\lambda_3 = 1+a$$

Vediamo ~~se~~ se gli autovalori coincidono per qualche valore del parametro $a$.

$$\lambda_1 = \lambda_2 \iff a = 1-a \iff a = \frac{1}{2}$$

$$\lambda_1 = \lambda_3 \iff 1 = 0 \quad \text{MAI}. \qquad \lambda_2 = \lambda_3 \iff a = 0$$

Per $a \neq 0$ e $a \neq \frac{1}{2}$ ci sono 3 autovalori di molteplicità algebrica 1 $\Rightarrow$ $T_a$ è diagonalizzabile.

$\boxed{a=0}$ $\quad p_{T_0}(x) = -x(x-1)^2$

$\lambda_2 = 1$ ha molt algebrica $\nu_1 = 2$

Calcolo la molt geometrica dell'autovalore 1

$\mu_1 = \dim \ker (T_0 - I)$

$$[T_0] - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim \ker (T_0 - I) = 3 - \#\text{pivot} = 3 - 2 = 1$

$\Rightarrow \mu_1 < \nu_1$ l'endomorfismo $T_0$ non è diag.

$a = \frac{1}{2}$ $\quad p_{T_{1/2}}(x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \left(x - \frac{3}{2}\right)$

l'autovalore $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ ha molt alg $\nu = 2$

~~Calc~~ Calcoliamo $\mu$ = ~~di~~ molt geom $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ =
$= \dim \ker (T_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} I)$

$$[T_{\frac{1}{2}}] - \frac{1}{2} I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ dim ker $\mu = 2$

$T_{1/2}$ è diag.

**Esercizio 4.** Sia $K$ un campo e sia $V = K[x]_{\leq 3}$. Consideriamo l'applicazione lineare $f : V \to V$ definita da:

$$f(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (a+b)x^3 + (b+c)x^2 + (c+d)x + (a-d)$$

a) Calcolare una base di *ker f*, *Imm f* e *Ker f* $\cap$ *Imm f* nel caso in cui $K = \mathbb{R}$.
b) Calcolare una base di *ker f*, *Imm f* e *Ker f* $\cap$ *Imm f* nel caso in cui $K = \mathbb{Z}_2$.

$$f(ax^3+bx^2+cx+d) = (a+b)x^3 + (b+c)x^2 + (c+d)x + (a-d)$$

Consideriamo la base canonica di $V$ $\mathcal{B} = \{x^3, x^2, x, 1\}$. La matrice associata a $f$ rispetto a $\mathcal{B}$ è data da

$$A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \left( [f(x^3)]_{\mathcal{B}}, [f(x^2)]_{\mathcal{B}}, [f(x)]_{\mathcal{B}}, [f(1)]_{\mathcal{B}} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

~~Sappiamo che ker f = $\Delta_A$ = {...}~~

Riduciamo a scala la matrice $A$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sia ora $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. In questo caso $\operatorname{rk} A = 4$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\}$, $\operatorname{Im} f = V$, $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

b) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$.

In questo caso $\bar{2} = \bar{0}$, quindi $\text{rk}\, A = 3$

e dalla teoria sappiamo che ~~f(x)~~

$\{ f(x^3), f(x^2), f(x) \}$ sono una base di $\text{Im} f$.

<u>Base $\ker f$</u>: si trova risolvendo il sistema

$$A \underline{x} = 0 \qquad \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ z + t = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y = t \\ y = z = t \\ z = t \end{cases}$$

Una base dello spazio delle soluzioni

di $A \underline{x} = 0$ è data da $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e

questo vettore, tramite l'isomorfismo

delle coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$,

corrisponde al polinomio $x^3 + x^2 + x + 1 = a(x)$

che è quindi una base di $\ker f$.

Poiché $\dim \ker f = 1$,

$$\ker f \cap \text{Im} f = \begin{cases} 0 \\ \ker f \iff a(x) \in \text{Im} f \end{cases}$$

Poiché $a(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = (x^3 + 1) + (x^2 + x) = f(x^3) + f(x)$

si ha $\ker f \cap \text{Im} f = \ker f$

e quindi $\{ a(x) \}$ è una base.